« المحاضرة الأولى عملي »

ليكن لدينا U و V فضائين شعاعيين و ليكن لدينا التطبيق $f: U \to V$
نقول عن f أنه تطبيق خطي إذا تحقق الشرطين
1) : $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2) : $f(\alpha v) = \alpha f(v)$

تمرين : بين فيما إذا كان التطبيق التالي خطياً
$f: R^2 \longrightarrow R^2$
$f(x,y) = (2x, y)$
نتحقق من صحة الشرطين
1 : $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
$f_1 = f(v_1+v_2) = f(x_1, y_1 + x_2, y_2)$
$= (2(x_1+x_2), (y_1+y_2))$
$= (2x_1+2x_2, y_1+y_2) = (2x_1, y_1) + (2x_2, y_2)$
$= f(v_1) + f(v_2) = f_2$
إذاً الشرط الأول محقق
2 $f(\alpha v) = \alpha f(v)$
$f_1 = f(\alpha v) = f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y)$
$= (2\alpha x, \alpha y) = \alpha(2x, y) = \alpha f(v) = f_2$
إذاً الشرط الثاني محقق
ومن تحقق الشرطين نجد أن التطبيق هو تطبيق خطياً

سننتقل الآن إلى تمرين آخر ☺

تمرين: بين فيما إذا كان التطبيق التالي خطياً؟

$$f : P_2 \longrightarrow M_2(R)$$

حيث P_2 فضاء كثيرات الحدود والتي درجة كل منها أصغر أو تساوي 2

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 \\ -a_2 & a_0 - a_1 \end{bmatrix}$$

الحل:

[1]: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

$$l_1 = f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2) = f(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2)$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 & -(a_2 + b_2) \\ -(a_2 + b_2) & a_0 + b_0 - a_1 - b_1 \end{bmatrix}$$

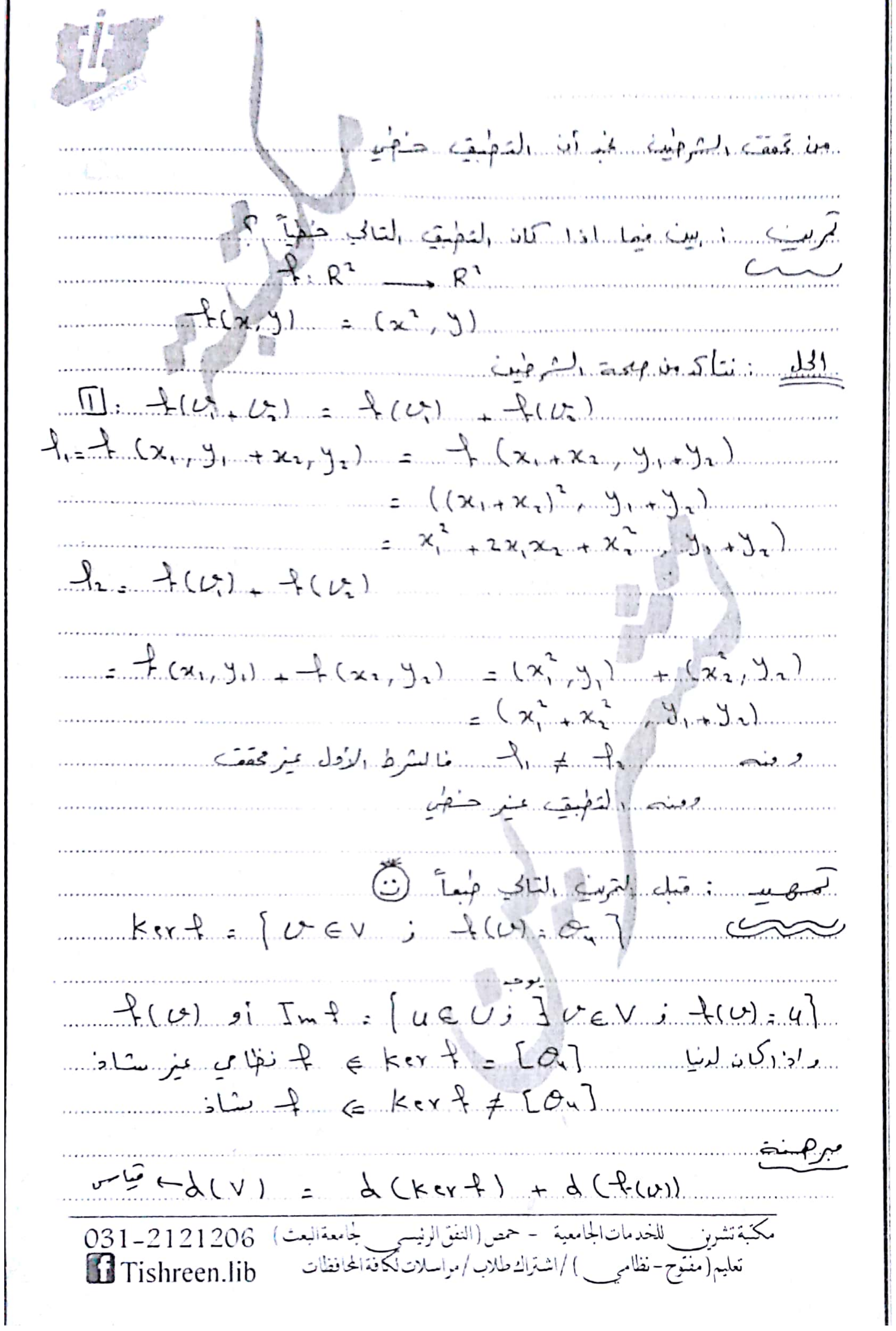
$$l_2 = f(v_1) + f(v_2) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 \\ -a_2 & a_0 - a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 & -b_2 \\ -b_2 & b_0 - b_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 & -(a_2 + b_2) \\ -(a_2 + b_2) & a_0 + b_0 - a_1 - b_1 \end{bmatrix} = l_1 \Rightarrow l_1 = l_2$$

[2]: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$

$$f(\alpha v) = f(\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2) = \begin{bmatrix} \alpha a_0 & -\alpha a_2 \\ -\alpha a_2 & \alpha a_0 - a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 \\ -a_2 & a_0 - a_1 \end{bmatrix} = \alpha f(v) = l_2$$



من تحقق الشرطين نجد أن التطبيق خطي

تمرين : بين فيما اذا كان التطبيق التالي خطياً ؟

$f : R^2 \longrightarrow R^1$

$f(x, y) = (x^2, y)$

الحل : نتأكد من صحة الشرطين

[1]: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

$l_1 = f(x_1, y_1 + x_2, y_2) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= ((x_1 + x_2)^2, y_1 + y_2)$

$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, y_1 + y_2)$

$l_2 = f(v_1) + f(v_2)$

$= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = (x_1^2, y_1) + (x_2^2, y_2)$

$= (x_1^2 + x_2^2, y_1 + y_2)$

ومنه $l_1 \neq l_2$ فالشرط الأول غير محقق

ومنه التطبيق غير خطي

تمهيد : قبل التمرين التالي طبعاً ☺

$\ker f = \{ v \in V ; f(v) = O_u \}$

يوجد

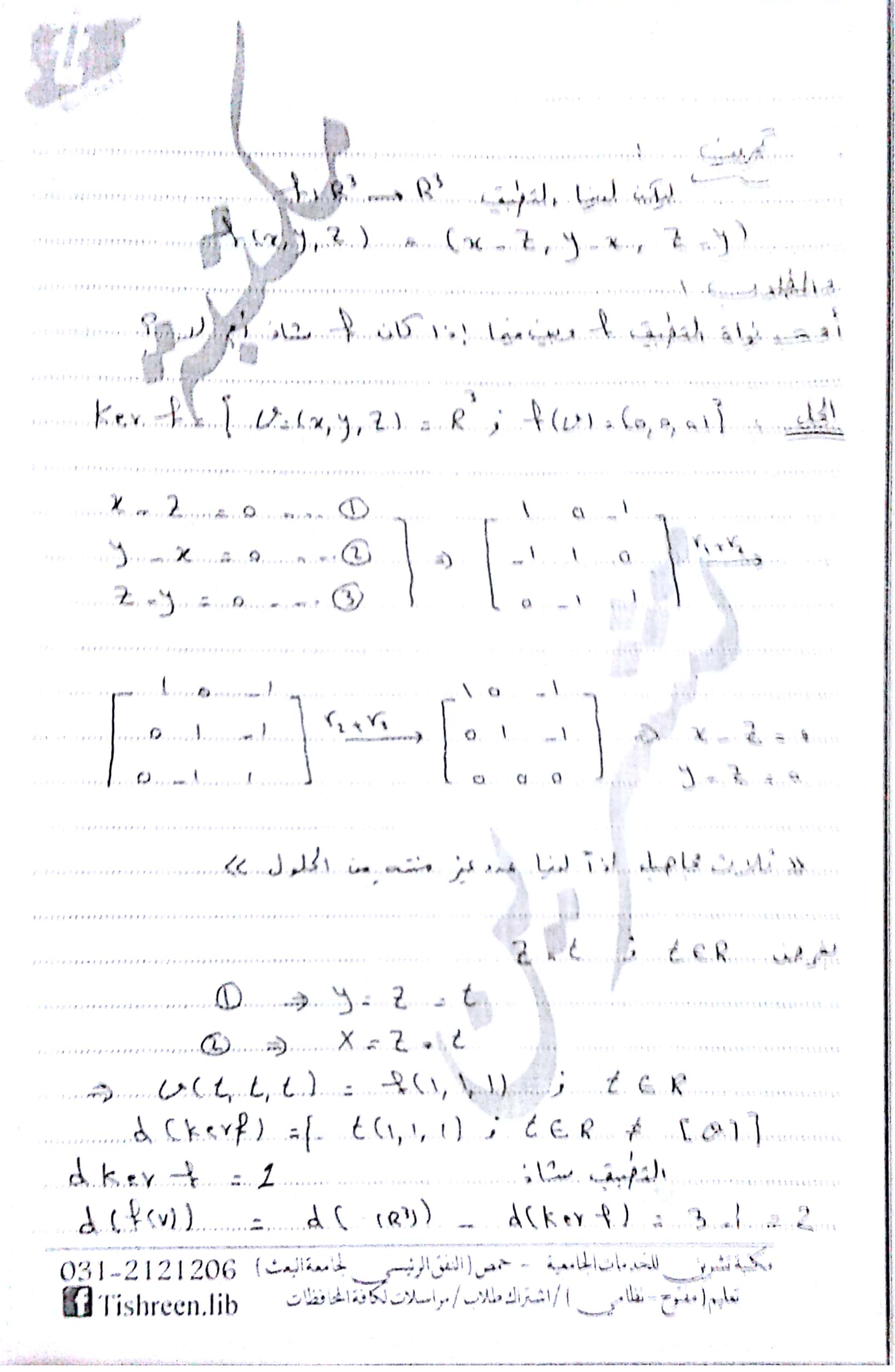
$f(v)$ أو $Im f = \{ u \in U ; \exists v \in V ; f(v) = u \}$

وإذا كان لدينا $\ker f = \{O_u\} \Leftarrow$ f نظامي غير شاذ

$\ker f \neq \{O_u\} \Leftarrow$ f شاذ

مبرهنة

قياس $\leftarrow d(V) = d(\ker f) + d(f(v))$



تمرين:

ليكن لدينا التطبيق $f: R^3 \to R^3$

$f(x,y,z) = (x-z,\ y-x,\ z-y)$

والمطلوب:

أوجد نواة التطبيق f وبعدها إذا كان f متباين أم لا؟

الحل: $Ker f = \{ v=(x,y,z) \in R^3 ;\ f(v)=(0,0,0) \}$

$$\left.\begin{array}{l} x - z = 0 \ \dots (1) \\ y - x = 0 \ \dots (2) \\ z - y = 0 \ \dots (3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}$$

« ثلاث مجاهيل ومعادلتان إذاً لدينا عدد غير منتهٍ من الحلول »

نفرض $z = t \ ; \ t \in R$

$(1) \Rightarrow y = z = t$

$(2) \Rightarrow x = z = t$

$\Rightarrow v(t,t,t) = t(1,1,1) \ ; \ t \in R$

$d(Ker f) = \{ t(1,1,1) \ ; \ t \in R \} \neq \{0\}$

$d\,Ker f = 1$ التطبيق ليس متباين

$d(f(V)) = d(R^3) - d(Ker f) = 3 - 1 = 2$

تمرين

ليكن $f: R^2 \longrightarrow R^3$

$f(x,y) = (x-y\ ,\ y\ ,\ 2x+y)$

المطلوب :

1- أوجد نواة التطبيق ثم بين فيما اذا كان f متباين

2- أوجد $d(f(R^2))$ أو $d(Im f)$

الحل :

$\forall (x,y) \in \ker f \Rightarrow f(x,y) = (x-y\ ,\ y\ ,\ 2x+y)$

$= (0,0,0)$

$\Rightarrow x - y = 0$ ... (1)

$y = 0$ ... (2)

$2x + y = 0$ ... (3)

من تعويض (2) في (3) نجد أن $2x + 0 = 0$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker f = \{(0,0)\}$ اذاً التطبيق متباين

[2] حسب مبرهنة البعد $d(f(V)) = d(V) - d(\ker f)$

$d(f(V)) = 2 - 0 = 2$

«انتهت المحاضرة الأولى»

«مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح»

إعداد : فاطمة الشميني